

## PERMUKAAN SAPUAN TRANSLASI DAN PUTARAN LENGKUNG KUARTIK SERUPA BEZIER

Jamaludin Md.Ali

PP Sains Matematik, Universiti Sains Malaysia, Penang.  
jamaluma@cs.usm.my

Dalam kertas kerja ini kita akan membincangkan tentang lengkung kuartik serupa Bezier yang merupakan adunan dua lengkung kubik serupa Bezier [Said, 1990]. Lengkung ini mudah dikawal memandangkan wujudnya beberapa parameter bebas dan ini merupakan kelebihan dalam rekabentuk. Salah satu aplikasinya ialah membentuk permukaan sapuan translasi dan juga permukaan putaran. Ini sebenarnya adalah juga silinder am kerana objek berbentuk lintah boleh dijana

*Kata-kunci: permukaan sapuan, lengkung Bezier, silinder am.*

### 1. Pengenalan

Dalam rekabentuk lengkung/permukaan adalah menjadi hasrat menjana lengkung yang perwakilan matematikanya dan sifat-sifat geometri mudah difahami. Dalam perisian CAD, lengkung jenis polinomial yang mungkin mudah dari segi matematikanya disamping kecepatan untuk mencari nilainya. Lazimnya bentuk kubik yang kerap dipakai kerana ia adalah cukup mewakili lengkung pada ruang kerana ia boleh menakrif lengkung yang berlengkuk balas. Dalam rekabentuk objek pula, apabila suatu profil lengkung ditranslasikan pada suatu arah atau diputar pada suatu paksi akan menghasilkan suatu permukaan yang dikenali sebagai permukaan sapuan yang telah dibincangkan oleh beberapa penyelidik seperti Choi [Choi,1991], Bloomenthal [Bloomenthal, 1991], Coquillart [Coquillart,1987] dan Wang [Wang, 2001]. Kaedah sapuan ini mudah dihayati secara geometrinya, berdasarkan banyak objek gunaan harian adalah direkabentuk dengan kaedah ini. Manakala lengkung profil tidak terhad yang berbentuk kubik sahaja, bahkan perwakilan jenis lain seperti bentuk nisbah kubik [Sarraz, 1993, 1994], B-Spline dan NURBS [Farin, 1990] boleh dipakai. Dalam kertas ini kita hanya menumpu kepada lengkung kuartik serupa Bezier yang dibincangkan oleh Jamaludin et. al [Jamaludin, 1995], dan aplikasinya untuk permukaan sapuan.

### 2. Lengkung Bezier Kuartik

Bentuk lengkung kubik serupa Bezier [Said, 1990] ditakrif sebagai

$$r(t) = (1-t)^2(1+(2-\alpha)t)P_0 + \alpha(1-t)^2tP_1 + \beta(1-t)t^2P_2 + t^2(1+(2-\beta)(1-t))P_3 \quad (1)$$

dengan nilai  $t$  terletak diantara 0, 1 manakala nilai  $\alpha$  dan  $\beta$  pula adalah sebarang nombor nyata,  $P_i$  adalah titik-titik kawalan. Bentuk lengkung boleh diubahsuai dengan mengubah nilai parameter. Apabila nilai  $\alpha = \beta = 3$ , mudah ditunjukkan bahawa ini adalah perwakilan Bezier suatu lengkung kubik, manakala jika  $\alpha = \beta = 2$ , lengkung kubik yang terhasil adalah dalam perwakilan Ball [Jamaludin, 1994]. Bez [Bez, 1985] membuktikan kekangan kepada nilai  $\alpha$  dan  $\beta$  dalam selang 0 hingga 3 supaya lengkung kubik memuasi kehendak hul cembung. Sebenarnya dengan kekangan ini mengurangkan kebebasan dalam penjanaan lengkung kubik. Walaupun wujud kebebasan untuk memilih nilai parameter, namun agak sukar untuk menghasilkan lenkung yang rata seperti bumbung kereta atau lengkung yang berlurah. Keadaan ini boleh diatasi dengan meningkat bilangan titik kawalan dan perwakilan lengkung Bezier tetapi mungkin agak sukar dikendalikan oleh pengguna.

Memandangkan kebebasan bentuk menerusi perwakilan kubik terbatas, satu pendekatan alternatif diambil iaitu menggabungkan dua jenis bentuk kubik supaya menjadi bentuk kuartik dengan mengekalkan titik-titik kawalan. Rumusnya mudah iaitu

$$R(t) = (1-t)r_1(t) + tr_2(t) \quad (2)$$

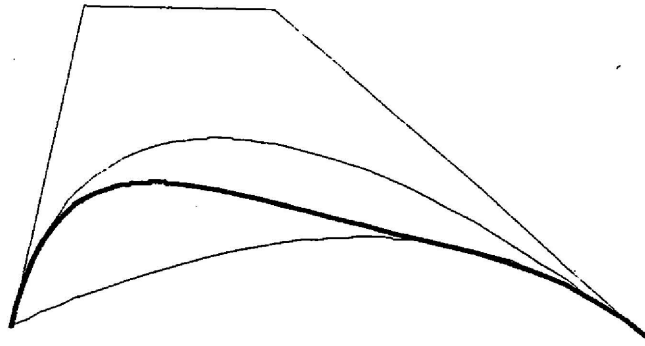
Lengkung  $r_1(t)$  adalah kubik serupa Bezier yang ditakrifkan oleh

$$r_1(t) = r(t) = (1-t)^2(1+(2-\alpha_1)t)P_0 + \alpha_1(1-t)^2tP_1 + \beta_1(1-t)t^2P_2 + t^2(1+(2-\beta_1)(1-t))P_3$$

manakala

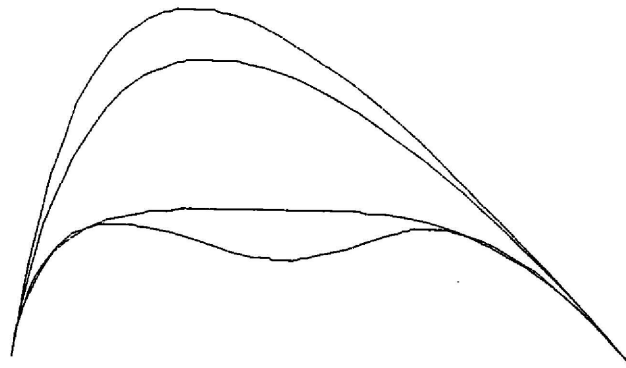
$$r_2(t) = r(t) = (1-t)^2(1+(2-\alpha_2)t)P_0 + \alpha_2(1-t)^2tP_1 + \beta_2(1-t)t^2P_2 + t^2(1+(2-\beta_2)(1-t))P_3.$$

Dengan penakrifan (2), lengkung  $R(t)$  didapati menginterpolasi dua titik hujung. Pada rajah 1, lengkung yang nipis adalah lengkung kubik manakala yang tebal adalah lengkung kuartik serupa Bezier yang terhasil dengan menggunakan persamaan (2)



Rajah 1. Lengkung tebal adalah lengkung kuartik yang ditakrifkan oleh persamaan (2)

Jelas wujud beberapa parameter bebas disamping poligon kawalan untuk menghasilkan berbagai rupa bentuk lengkung. Sebagai memudahkan perekaan lengkung, diambil nilai  $\alpha_1 = \alpha$ ,  $\beta_2 = \beta$ ,  $\beta_1 = \alpha_2 = \gamma$ . Dengan ini  $\alpha$  dan  $\beta$  dikenali sebagai parameter tegangan manakala  $\gamma$  adalah parameter bentuk. Pada rajah 2 adalah berbagai lengkung kuartik dengan menggunakan pelbagai parameter bentuk.



Rajah 2. Lengkung kuartik dengan  $\alpha = \beta = 3$ , dan nilai  $\gamma = -2, 0, 3, 4$  dengan lengkung paling bawah  $\gamma = -2$ .

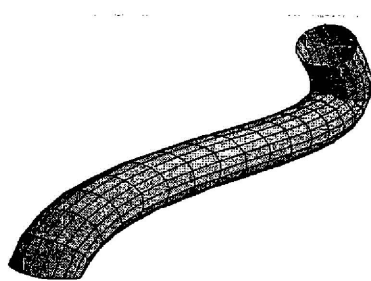
### 3. Permukaan Sapuan.

Jenis permukaan sapuan yang mudah ialah permukaan sapuan translasi dan putaran atau pun gabungan kedua-dua jenis sapuan ini. Kertas ini hanya membincangkan dua jenis ini sahaja. Permukaan sapuan translasi dapat ditakrifkan seperti berikut. Andaikan  $r(v)$  dan  $g(u)$  adalah dua lengkung, maka suatu permukaan translasi  $S(u, v)$  diberikan sebagai

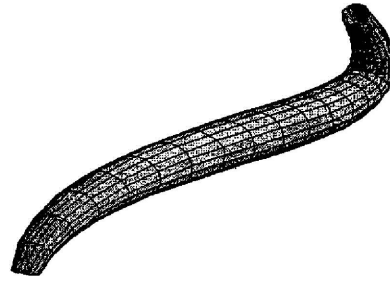
$$S(u, v) = r(v) + g_1(u)N(v) + g_2(u)B(v) \quad (3)$$

dengan  $r(v)$  sebagai tulang belakang atau lengkung arah dan  $g(u) = (g_1(u), g_2(u))$  adalah lengkung profil planar.  $N(v)$  dan  $B(v)$  adalah kerangka berortogon planar terhasil dari terbitan pertama  $r(v)$ . Persamaan

(3) mampu menjana silinder yang berbentuk lintah dengan  $g(u)$  sebagai bulatan atau elips dengan jejari yang tidak tetap. Rajah 3 dan rajah 4 adalah contoh permukaan sapuan dengan menggunakan persamaan (3).



Rajah 3: Jejari tetap



Rajah 4: Jejari berubah

Untuk mempelbagaikan jenis permukaan dalam rekabentuk, dalam kertas ini suatu pendekatan alternatif permukaan sapuan ini diubah suai penakrifannya [Jamaludin, 2004]. Andaikan  $q_0(v), q_1(v), q_2(v)$ , dan  $q_3(v)$  adalah lengkung kawalan dengan  $q_0(v)$ , dan  $q_3(v)$  sebagai lengkung rel, permukaan sapuan  $S(u, v)$  ditakrifkan sebagai

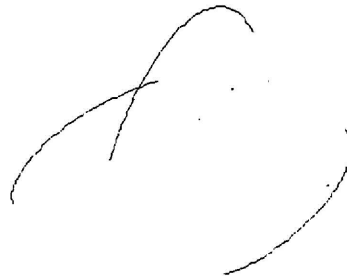
$$S(u, v) = (1 - u)S_0(u, v) + uS_1(u, v) \quad (4)$$

Dengan

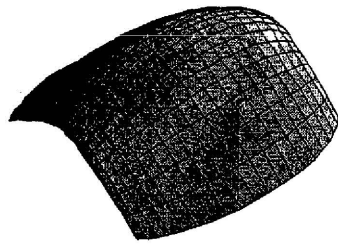
$$S_0(u, v) = (1 - u)^2 (1 + (2 - \alpha)u)q_0(v) + \alpha(1 - u)^2 uq_1(v) + \gamma(1 - t)t^2 q_2(v) + t^2 (1 + (2 - \gamma)(1 - t))q_3(v)$$

$$S_1(u, v) = (1 - u)^2 (1 + (2 - \gamma)u)q_0(v) + \gamma(1 - u)^2 uq_1(v) + \beta(1 - t)t^2 q_2(v) + t^2 (1 + (2 - \beta)(1 - t))q_3(v)$$

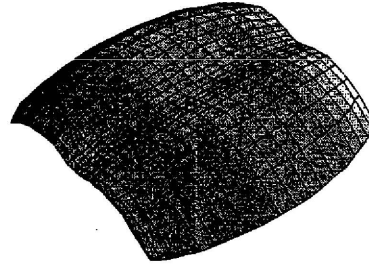
Dua rajah berikut adalah dihasilkan dengan mengguna rel dan parameter tegangan yang sama, tetapi berlainan nilai parameter bentuk. Rajah 5 adalah lengkung kawalan dengan lengkung kiri kanan sebagai lengkung rel, dan hasil permukaan sapuan adalah pada rajah 6 dengan nilai parameter bentuk  $\gamma = 2$ , manakala rajah 7 nilainya adalah  $-2$ . Kita dapati macam wujud lurah apabila parameter bentuk adalah negatif. Ini jelas dari sifat lengkung kuartik serupa Bezier yang dibincangkan diatas.



Rajah 5. Lengkung kawalan, lengkung rel dikiri kanan dan lengkung  $q_1(v) = q_2(v)$

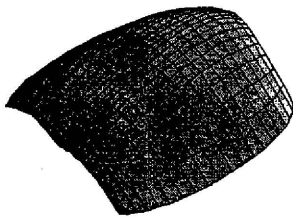


Rajah 6.  $\gamma = 2$

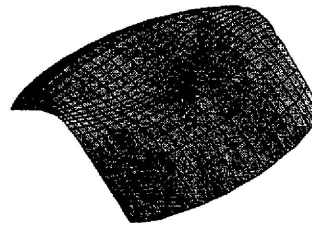


Rajah 7.  $\gamma = -2$

Nilai  $\gamma$  tidak semestinya tetap, ia boleh berubah sepanjang perubahan nilai  $v$ , atau sepanjang rel. Andaikan  $\gamma(v)$  berbentuk  $\gamma(v) = (1-v)(2) + v(-2)$  maka permukaan yang terhasil adalah seperti dalam rajah 8, didapati satu hujung berbentuk lurah. Jika  $\gamma(v) = (1-v)^2(2) + 2(1-v)v(-6) + v^2(2)$  adalah kuadratik dua hujung tidak berlurah tetapi tidak pada bahagian tengah, seperti yang diilustrasikan pada rajah 9.

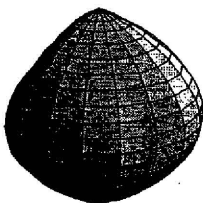


Rajah 8. dengan  $\gamma(v)$  linear

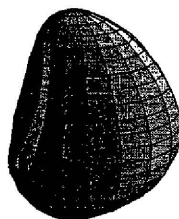


Rajah 9.  $\gamma(v)$  kuadratik

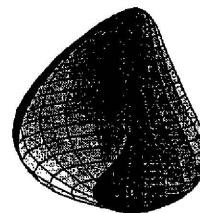
Agak menarik juga bentuk objek yang diperolehi jika lengkung kawalan adalah lengkung tertutup, dan ini akan menghasilkan bentuk permukaan sapuan putaran dengan kepelbagaian nilai parameter bentuk apabila nilai sudut putaran berubah. Contoh-contoh berikut adalah objek menarik yang boleh dijana dengan kaedah putaran ini. Rajah 11 adalah berbetuk seperti jambu yang dicanggakan, manakala pada rajah 12 ia berbentuk seakan siput.



Rajah 10. Objek tidak dicangga



Rajah 11. Objek dicangga



Rajah 12. Berbentuk siput

#### 4. Dapatan dan Kesimpulan

Kaedah sapuan untuk penjanaan permukaan didapati mudah untuk difahami oleh pereka bentuk. Asas matematik dan terjemahan geometrinya mudah, dan penggunaan lengkung Bezier kuartik yang dicadangkan dapat membantu pereka bentuk menjana objek yang agak menarik dengan mudah. Namun begitu masih wujud beberapa masalah terutamanya apabila lengkung arah atau lengkung tetulang tidak regular, iaitu terbitan pertamanya tidak selanjat. Tetulang yang berpunding tidak regular dan ini mesti dikaji untuk menentukan kesesuaian permukaan sapuan. Suatu lagi ruang kajian ialah menentukan samada permukaan yang terhasil adalah adil jika lengkung profail dan lengkung tetulang adalah adil.

#### Penghargaan

Penulis ingin merakamkan penghargaan kepada Pusat Pengajian Sains Matematik USM yang memberi segala kemudahan untuk penyelidikan. Segala objek dijanakan oleh perisian *Mathematica 5*.

#### Rujukan

- Bloomenthal, M et. al. (1991) *J. Approximation of sweep surfaces by tensor product NURBS. Curves and Surfaces in Computer Vision and Graphics II*, 1991, pg 132
- Bez, H. E (1985). Technical Note: cubic curves, SHORT COMMUNICATION *Computer-Aided Design*, Volume 17, Issue 8, 1985, pg. 367-368
- Coquillart, S (1987). A control-point-based sweeping technique. *IEEE CG/A 11*. pg 36 – 45.
- Farin, G (1990), *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, Second Ed. Academic Press (NY) 1990
- Jamaludin M, (1994). An alternative derivation of Said basis functions, *Sains Malaysiana*, UKM 1994
- Jamaludin M, Majid, A, Said, H (1995) Shape control of parametric cubic curves, *The 4th International Conference in CAD/CG*, Wuhan China 1995, pg 161 – 166.
- Jamaludin M, Yeap T, (2004). Bezier like quartic curve swith applications to swept and swung surfaces, *Punjab University Journal of Mathematics XXXVI*, Lahore, Pakistan 2003/2004.
- Said, H (1990), The Bezier-Ball type cubic curves and surfaces, *Sains Malaysiana*, UKM, Malaysia 1990.
- Sarfraz, M (1993). Designing of curves and surfaces using rational cubics, *Computesr and Graphics*, 17 (5) pg. 529 – 538.
- Sarfraz, M (1993). Cubic spline curves with shape control. *Computers and Graphics*, 18 (4) pg. 707-713